

**Univerzita Komenského v Bratislave**  
**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky**

**Interaktívna výuková webová aplikácia**  
**na riešenie úloh o matematických hrách**

Bakalárska práca

**Univerzita Komenského v Bratislave**  
**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky**

**Interaktívna výuková webová aplikácia**  
**na riešenie úloh o matematických hrách**

Bakalárska práca

Študijný program: Aplikovaná informatika  
Študijný odbor: 2511 Aplikovaná informatika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky  
Školiteľ: Mgr. Pavel Petrovič, PhD.

**Bratislava 2016**

**Tomáš Žitňanský**



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Tomáš Žitňanský  
**Študijný program:** aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.2.9. aplikovaná informatika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách  
*Interactive Educational Web Application for Solving Tasks on Mathematical Games*

**Cieľ:** Úlohou je vytvoriť sprievodnú webovú aplikáciu k publikácii "Hry takmer matematické", ktorá vyšla v sérii príručiek Školy mladých matematikov. Aplikácia má poskytovať interaktívne prostredie, v ktorom používateľ skladaním elementárnych krokov rieši jednotlivé úlohy a tým objavuje princípy a poznatky ako sú prezentované v publikácii konštruktivistickým spôsobom. Úlohou bakalárskeho študenta je dôkladne pochopiť a analyzovať problematiku v zvolenej publikácii, vybrať vhodné príklady a spôsoby ich prezentovania a interaktívneho riešenia vo webovej aplikácii a dotiahnuť implementáciu aj po vizuálnej stránke do hotového použiteľného výsledku, ktorý má oblasť matematických hier študentom s nadšením pre matematiku na stredných školách urobiť prístupnejšou.

**Literatúra:** Ján Gatiaľ, Tomáš Hecht, Milan Hejný: HRY takmer matematické, ŠMM, Mladá fronta, 1982.  
Monika Švaralová: Výukový program demonštrujúci matematický princíp, bakalárska práca, FMFI UK, 2015.

### Kľúčové

**slová:** educational application, web application, mathematical games

**Vedúci:** Mgr. Pavel Petrovič, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky  
**Vedúci katedry:** prof. Ing. Igor Farkaš, Dr.  
**Dátum zadania:** 01.10.2015

**Dátum schválenia:** 28.10.2015

doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.  
garant študijného programu

*Pavel Petrovič*

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **Čestné vyhlásenie**

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedených zdrojov.

V Bratislave

.....  
Tomáš Žitňanský

## **Pod'akovanie**

Ďakujem hlavne môjmu školiteľovi Mgr. Pavlovi Petrovičovi, PhD. za všetky jeho rady, čas, ktorý mi venoval a pomoc pri tvorení celej práce.

## **Abstrakt**

Cieľom tejto práce je navrhnúť a implementovať webovú výukovú aplikáciu pre žiakov stredných škôl so zameraním na matematiku. Témou aplikácie je hľadanie víťazných stratégií, demonštrované pomocou hry Nim. Program obsahuje sériu cvičení, ktoré používateľa vovedú do problematiky a pomocou ktorých si vyskúša tvorenie a následné využitie víťazných stratégií. Správnosť stratégií, vytvorených používateľom, je kontrolovaná samotným programom. Aplikácia taktiež umožňuje si zahrať tri rôzne náročné typy hier Nim proti počítačom vygenerovanej stratégií, proti niektorej z vlastných stratégií, alebo proti inému aktuálne prihlásenému hráčovi. Príklady a tématika aplikácie je inšpirovaná knihou zo série Škola mladých matematikov: Hry takmer matematické [1].

**Kľúčové slová:** *webová aplikácia, výuková aplikácia, hra Nim, víťazné stratégie*

## **Abstract**

The aim of this work is to design and implement an educational application for secondary school students focusing on mathematics. The theme of the application is the search for winning strategies, demonstrated on the game Nim. The program contains a series of exercises that introduce the problem to the user. They require the user to create and then use winning strategies. Correctness of user-created strategies is verified by the program. The application also allows users to play three types of Nim games at different difficulty levels against computer-generated strategy, against one of their own strategies, or against another currently logged player. Exercises and theme of the application is based on the book series of the School of Young Mathematicians: Games almost mathematical [1].

**Keywords:** *web application, educational application, Nim game, winning strategies*

# Obsah

1. Úvod.....	10
2. Východiská.....	12
2.1 Prehľad teórie.....	12
2.1.1 Sériá kníh Škola mladých matematikov.....	12
2.1.2 Kniha Hry takmer matematické.....	12
2.1.3 O hre NIM.....	14
2.1.3.1 Stručná história hry NIM.....	14
2.1.3.2 Čo je hra NIM.....	14
2.1.3.3 NIM I (zjednodušený NIM).....	15
2.1.3.4 NIM II (NIM takmer klasický).....	16
2.1.3.5 Klasický NIM - využitie binárnej sústavy.....	18
2.1.4 Edukačný software.....	19
2.2 Prehľad technológií.....	20
2.2.1 Výhody javascriptu a html5 pri tvorbe webových aplikácií.....	20
2.2.2 Knižnica JQuery.....	21
2.2.3 Bootstrap.....	21
2.2.4 Google Identity Platform.....	22
2.3 Podobné aplikácie a projekty.....	22
2.3.1 Matika.in.....	22
2.3.2 Simulátory NIM - Pearl3 a NimGame.....	23
2.3.3 Výukový program demonštrujúci matematický princíp.....	24
3. Návrh riešenia.....	25
3.1 Ciele projektu.....	25
3.1.1 Prihlasovanie.....	25
3.1.2 Krok za krokom.....	25
3.1.3 Sandbox.....	25
3.1.4 Online výzvy.....	26
3.1.5 Príklady v časti “Krok za krokom”.....	26



3.2 Komponenty a triedy.....	27
3.2.1 Hra.....	28
3.2.1.1 NimGame.....	28
3.2.1.2 NimGameDisplay.....	28
3.2.1.3 NimUI.....	29
3.2.2 StrategyMap.....	30
3.2.3 NarratorDialog.....	30
3.2.4 NimSocket.....	30
3.3 Návrh stránok pre jednotlivé komponenty.....	31
3.3.1 Krok za krokom.....	31
3.3.2 Sandbox.....	32
3.3.2.1 Editor stratégií.....	32
3.3.2.2 Simulátor.....	33
3.3.2.3 Online výzvy.....	34
3.3.3 Node.js.....	35
3.3.4 PHP-backend.....	35
3.4 Dátový model a forma ukladaných údajov.....	36
3.5 Komunikačné protokoly.....	37
3.5.1 Ajax.....	37
3.5.2 Google Identity Platform.....	37
3.5.3 Socket.io.....	37
3.6 Konfiguračné súbory.....	39
4. Testovanie.....	43
5. Záver.....	44
Použitá literatúra.....	45

# 1. Úvod

Hry sprevádzajú človeka už od nepamäti. Majú miesto predovšetkým v detskom veku, ale mnoho hier bolo vyvinutých aj pre dospelých ľudí, napríklad šach. U ľudí, takisto ako aj v ríši zvierat, majú hry často nie len úlohu zabaviť, ale aj poučiť ich účastníkov, či pozorovateľov. Väčšina zvieracích hier a niektoré ľudské hry sú zamerané predovšetkým na fyzickú šikovnosť alebo zručnosť, no nás budú zaujímať predovšetkým hry, ktoré rozvíjajú logické a strategické myslenie.

Stratégie ako vyhrať, alebo inak víťazné stratégie, sa okrem hier využívajú aj v každodennom živote. Samotné rozhodovanie, ako najlepšie a najefektívnejšie dosiahnuť svoj cieľ už môžeme nazvať stratégiou. Človek využíva stratégie v najrôznejších oblastiach, ako sú napríklad šport, financie a biznis, vojna a mnoho iných. Všetky tieto stratégie však majú jednu spoločnú črtu. Sú postavené na zozbieraných informáciách a ich najdokonalejšie verzie by mali, za predpokladu, že pri tvorbe boli dostupné všetky potrebné informácie, bezchybne priviesť svojho tvorcu k vyznačenému cieľu, ak je to v danej situácii možné.

Vyučovanie tvorby a využívania víťazných stratégií nebolo pravdepodobne nikdy zaradené do učebných osnov, ale niektoré základné a stredné školy so zameraním na matematiku túto tématiku už v minulosti vyučovali. Bolo taktiež vydaných niekoľko kníh zaoberajúcich sa víťaznými stratégiami, no väčšina z nich bola publikovaná len v angličtine. Jednou z kníh dostupných v slovenskom jazyku je kniha “Hry takmer matematické” zo série “Škola mladých matematikov”. Táto kniha sa stala inšpiráciou myšlienky napísať výukovú webovú aplikáciu venujúcu sa víťazným stratégiam. K dnešnému dňu nie je veľa dostupných aplikácií, ktoré by sa venovali výučbe danej tématiky, prípadne s využitím moderných postupov a technológií.

Cieľom mojej aplikácie bude oboznámenie používateľa s tématikou víťazných stratégií a ich využiti v demonštračnej hre NIM. Aplikácia bude obsahovať náučný tutoriál, ktorý bude mať za cieľ viesť používateľa k objavovaniu postupov pre tvorbu stratégií a neskôr zabezpečiť aj niekoľko cvičení, na ktorých si používateľ vyskúša novonadobudnuté vedomosti. Ďalšia časť aplikácie bude venovaná žiakom, ktorí už

absolvovali náučný tutoriál, alebo jednoducho budú chcieť objavovať postupy “na vlastnú päsť”. Aplikácia bude ponúkať nástroje na tvorbu víťazných stratégií a simulátor, kde si používateľ bude môcť preveriť tieto stratégie v hre proti vygenerovanej, alebo vlastnej stratégii. Posledná časť aplikácie bude poskytovať prihláseným používateľom vyzvať k hre iných žiakov v reálnom čase.

Veľa ľudí považuje hry Nim za pomerne jednoduché a triviálne, no niektoré verzie tejto hry, ako napríklad dvoj-kôpkový Nim s možnosťou brať kamene z oboch kôpok naraz, vyžadujú pri generovaní stratégie zložitejšie algoritmy, napr. dynamické programovanie. “Umelá inteligencia” v aplikácii bude schopná nie len generovať dokonalú víťaznú stratégiu, ale aj hrať podľa používateľovej stratégie, ktorá môže byť chybná.

Všetky vytvorené stratégie si používateľ bude môcť uložiť na server do SQL databázy, alebo na lokálne úložisko vo svojom prehliadači. Aby mal prístup k úložisku na serveri, bude sa musieť prihlásiť pomocou účtu Google, k čomu bude slúžiť Google Identity Platform zastavaná do aplikácie.

## **2. Východiská**

### **2.1 Prehľad teórie**

#### **2.1.1 Séria kníh Škola mladých matematikov**

Príručky v edícii Škola mladých matematikov (v československom origináli Škola mladých matematiků) začali postupne vychádzať od roku 1961 na podnet Ústredného výboru Matematickej olympiády, ktorá v tom čase úspešne prebiehala v Československu už desať rokov. Bola určená stredoškolským študentom, prehľbovala ich matematické vedomosti, prinášala rad zaujímavých príkladov a rozširovala ich obzory. Nadväzovala na úspešné edície Cesta k poznaniu (orig. Cesta k věděni) a Brána k poznaniu (orig. Brána k věděni) vydávané v rokoch 1940 až 1951 Jednotou českých, resp. československých matematikov a fyzikov. Edícia Škola mladých matematikov obsahuje 61 zväzkov, respektíve jednotlivých kníh, venujúcich sa rôznym odvetviam matematiky. Dodnes sú niektoré z nich dostupné v niektorých školských knižniciach, prípadne v elektronickej forme.

#### **2.1.2 Kniha Hry takmer matematické**

Počas tvorby tejto bakalárskej práce sa budem venovať predovšetkým knihe číslo 53 - Hry takmer matematické [1]. Autori tejto knihy sa snažia čitateľa oboznámiť prístupnou formou so základmi teórie hier. Nieкто by možno namietal, že hra je len detskou činnosťou, slúžiacou výhradne na zábavu a s učením, alebo dokonca s matematikou nemá nič spoločné, no nie je tomu úplne tak. Hry sprevádzajú človeka (a taktiež aj niektoré druhy zvierat) počas celej jeho histórie a často slúžia predovšetkým na osvojovanie si nových skúseností, vlastností a zručností. Autor knihy poukazuje na určité prvky podobnosti aj medzi hrou a vojnou, napriek jej tragickej povahe. Presne ako aj hra, má svoje pravidlá a každá zo strán sa snaží využiť najlepšiu stratégiu k dosiahnutiu svojho cieľa - víťazstva. Teória hier je z matematického hľadiska teóriou matematických modelov, slúžiacich na hľadanie

optimálnych riešení v závislosti od konfliktných situácií. Konfliktom rozumieme situáciu, ku ktorej vieme určiť, kto a ako sa jej zúčastňuje a aké môžu byť voľby postupu jednotlivých zúčastnených strán. V skratke povedané, náučné matematické hry nás často učia ako si zvolit' stratégiu, prípadne konkrétny krok, určitej činnosti tak, aby sme dosiahli čo najlepší jej výsledok.

Samotná kniha Hry takmer matematické je rozdelená na tri časti. Prvá sa venuje hre NIM a hľadaniu víťazných stratégií. Druhá časť obsahuje príklady a teóriu k binárnej sústave, ktorá podmieňuje nájdenie víťaznej stratégie pri takzvanom "n-kôpkovom" NIME. V poslednej časti autori knihy objasňujú niektoré zmiešané stratégie a grafické riešenia úloh lineárneho programovania.

Nás bude zaujímať predovšetkým prvá časť venujúca sa hre NIM a čiastočne aj druhá, ktorá s hrou NIM súvisí.

Keďže celá kniha je písaná v duchu náučných hier, tak aj samotné vedomosti sú podávané tematickou formou, konkrétne ako rozhovor a hra dvoch žiakov (Anky a Borisa), do ktorej sa zapája aj sám autor knihy, pričom objasňuje niektoré potrebné fakty o preberanom učive. Takáto forma je pre študentov stredných škôl prít'azlivejšia, ako podávanie "suchých" faktov a teórií, čo má za dôsledok zvýšenú pozornosť a záujem žiakov o učivo.

Mnou zvolená časť knihy, ktorú budem spracovávať do podoby vyučbovej webovej aplikácie, sa venuje viacerým druhom hry NIM. Najjednoduchší variant tejto hry je takzvaný "jednokôpkový", v knihe a neskôr v tomto dokumente označovaný ako NIM I. Pri tejto verzii hry NIM, autori oboznamujú žiaka s termínmi ako víťazná stratégia, víťazná alebo kritická pozícia a taktiež s možnosťami ich hľadania a neskoršieho využitia. Ďalšie varianty hry NIM sa hrajú už s dvoma kôpkami predmetov a slúžia na učenie hľadania komplikovanejších víťazných stratégií a spôsobov ich zápisu. Tieto verzie sú označované ako NIM II a III. Neskôr sa autori venujú hrám NIM, ktoré sa odlišujú od ostatných nie len počtom kôpok, ale zmenou víťazného pravidla (napríklad NIM IV), alebo obmedzenia možnosti ťahu protihráča pomocou vlastného ťahu (NIM V). Posledným variantom je NIM VI, ktorý je podobný hre NIM II s tým rozdielom, že sa hrá s tromi kôpkami a teda má aj inú

vít'aznú stratégiu. Pri tejto stratégii je potrebné poznať binárnu sústavu a vedieť ju používať. Týmto variantom sa autori najviac priblížili hre NIM, ktorá je známa na internete a to k takej, ktorá sa hrá s ľubovoľným (ale vyšším ako 2) počtom kôpok a využíva rovnakú vít'aznú stratégiu ako NIM VI.

Pravidlám jednotlivých verzií, ich vít'azným stratégiám, ich dôkazom a terminológiou ako napríklad vít'azná a kritická pozícia sa venujem v ďalšej kapitole "O hre NIM".

### **2.1.3 O hre NIM**

#### **2.1.3.1 Stručná história hry NIM**

Prvá publikácia ktorá spomína a celkovo sa venuje hre NIM bola uverejnená v roku 1901 v časopise *Annals of Mathematics* na Harvardskej univerzite [2]. Autorom článku je Charles L. Bouton. Bouton uvádza, že sa s touto hrou po prvý krát stretol na niektorých amerických trhoch a univerzitných internátoch, kde bola táto materiálne nenáročná hra veľmi populárna. Viaceré zdroje na internete [3] uvádzajú, že hra NIM pochádza pôvodne z Číny, čím však protirečia Boutonovmu článku, ktorý taktiež uvádzajú ako jeden zo svojich zdrojov. Bouton píše, že názov NIM bol vymyslený a udelený tejto hre až neskôr (je pravdepodobné, že ho sám vymyslel), a že spomínanú hru vtedajší ľudia volali Fan-Tan. V skutočnosti existuje čínska hra s týmto názvom, ale Bouton jasne hovorí v úvode svojho článku, že sa nejedná o túto rovnomennú hru. V neskorších rokoch sa táto hra rozšírila medzi matematikov, ale aj obyčajných ľudí na celom svete a pre svoje vlastnosti sa začala dokonca využívať na niektorých školách na učenie hľadania, využívania vít'azných stratégií a rozvíjanie induktívneho myslenia u detí. V nedávnej dobe bolo vydaných aj niekoľko učebníc venujúcich sa výučbe pomocou hry NIM. [4]

#### **2.1.3.2 Čo je hra NIM**

Hra NIM je materiálne nenáročná hra, ktorá sa hrá s nejakou drobnou entitou, napríklad zápalkami. Hrajú ju dvaja hráči, pričom berú podľa pravidiel sebou zvolený počet zápalkiek zo spoločnej zásoby. Hráči sa v ťahoch striedajú a snažia sa vziať

poslednú zápalku zo spoločnej zásoby, čím by hru vyhrali. NIM sa odlišuje od väčšiny hier tým, že obaja hráči poznajú všetky potrebné informácie o rozohranej partii, ako napríklad počet elementov na hracej kôpke, v hre nie prítomná náhoda, ani nie je vyžadovaná žiadna manuálna, fyzická, či komunikačná zručnosť hráčov. Hru je vždy možné vyhrať pomocou jedinej víťaznej stratégie, ktorá je vždy založená na matematickej teórii hľadania kritických a víťazných pozícií hry, ktoré sa nikdy nemenia.

Víťazná stratégia by sa zjednodušene dala opísať ako návod, pomocou ktorého vieme danú hru hrať čo najlepšie. Kritickou pozíciou môžeme nazvať situáciu v ktorej ak sa hráč ocitne, nie je schopný vyhrať, ak jeho protivník je “dokonalý” - pozná správnu víťaznú stratégiu a každý svoj ťah zahrá podľa nej. Víťaznou pozíciou nazývame situáciu, ktorá nie je kritická a dokážeme spraviť taký ťah, ktorým dostaneme súpera do kritickej pozície.

### 2.1.3.3 NIM I (zjednodušený NIM)

Prvá verzia hry NIM, ktorej sa budem venovať je “jednokôpková” hra NIM. Veľa zdrojov, vrátane knihy “Nim Serious Math with a Simple Game” [4] túto verziu volá zjednodušený NIM. Na spoločnej kôpke sa nachádza  $n$  hracích kameňov (hracie elementy, ktoré neskôr už budeme nazývať iba kamene) z ktorých hráči striedavo berú minimálne  $1$  a maximálne  $k$  kameňov. Vyhráva hráč, ktorý vezme z kopy posledný kameň. Prevezmeme systém značenia hier NIM z knihy “Hry takmer matematické” a túto verziu budeme označovať ako **NIM I** ( $n; k$ ).

Kritické pozície tejto hry sú vždy násobkom čísla  $k+1$  a víťazné pozície sú všetky ostatné pozície hry. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Základnou kritickou pozíciou našej stratégie a prvým indukčným krokom je pozícia  $0$ , pretože ak na kope nie sú žiadne kamene, tak súper vzal pred nami posledný kameň a my sme teda prehrali. Indukčný krok bude dokázať, že ak  $x^{*(k+1)}$  je kritická pozícia, pre ľubovoľné  $x \geq 0$ , tak potom aj  $(x+1)^{*(k+1)}$  je kritická pozícia. To bude platiť vtedy, ak z pozície  $(x+1)^{*(k+1)}$ , hráč na ťahu nie je schopný ťahať tak, aby dostal súpera na nejakú kritickú pozíciu, teda ani na najbližšiu kritickú pozíciu  $x^{*(k+1)}$ .

Keďže hráč na ťahu môže vziať maximálne  $k$  kameňov, nie je teda schopný z tejto pozície dostať súpera na kritickú pozíciu  $x^{*(k+1)}$ , alebo žiadnu menšiu a musí vziať minimálne 1 kameň, čím svojho súpera dostane do pozície s  $k+x^{*(k+1)}$ , alebo menej kameňmi. Protihráčova pozícia je však víťazná, lebo stačí aby náš súper vzal kamene prevyšujúce číslo  $x^{*(k+1)}$ , ktorých je nanajvýš  $k$  a tým nás dostal na kritickú pozíciu. Ak  $x$  bolo rovné 0 (prvý indukčný krok), náš súper vzal posledný kameň a hru vyhral. Dokázali sme, že hráč nachádzajúci sa v pozícii  $x^{*(k+1)}$  nie je schopný hru vyhrať, lebo nedostane súpera na žiadnu kritickú pozíciu, iba na pozície, z ktorých nás na kritickú pozíciu dostať dokáže.

Pomocou tohto dôkazu môžeme vytvoriť víťaznú stratégiu, ktorá nám vraví, že ak sa nenachádzame v kritickej pozícii, ktorými sú násobky čísla  $k+1$ , tak musíme súperovi nechať iba počet kameňov rovný násobku čísla  $k+1$ , čím ho dostaneme do kritickej pozície. Opakovaním tohto kroku dokážeme hru vždy vyhrať, ak hru nezačíname priamo v kritickej pozícii.

#### **2.1.3.4 NIM II (NIM takmer klasický)**

Druhá verzia hry NIM je už komplikovanejšia a jej víťazná stratégia sa hľadá náročnejšie. Hráči tento krát hrajú s dvoma kôpkami kameňov. Existujú dva varianty pravidiel pre tento dvojkôpkový NIM.

Prvý variant dovoľuje brať ľubovoľný, nenulový počet kameňov, no iba z jednej kôpky. Druhý variant dodatočne dovoľuje vziať z oboch kôpok naraz 1 až  $k$  kameňov. Keďže prvý variant sa viac približuje klasickému NIMu, tak sa budem najprv venovať druhému variantu.

Tento variant hry NIM je v knihe Hry takmer matematické označovaný ako NIM III(a,b,k), kde “a” a “b” označujú počet kameňov na jednotlivých kôpkach a  $k$  je maximálny počet kameňov, ktoré hráč môže naraz vziať z obidvoch kôpok. Keďže zmena hodnoty  $k$  zásadne mení aj možnosti ťahov, tak neexistuje nejaká jednotná stratégia pre všetky verzie tejto hry, no sme schopný nájsť kritické pozície každej hry NIM III pomocou grafického zobrazenia situácií v mriežke (Obr 1.)





vítaznú pozíciu. Situáciu, keď sa počty kameňov nerovnajú môžeme prehlásiť za vítaznú pozíciu preto, že stačí počet kameňov vyrovnať, súper sa tak dostane do kritickej pozície a taktiež vítazný ťah, keď na jednej kôpke nie je žiaden kameň, ale na druhej ostal minimálne 1, patrí do tejto skupiny situácií.

Vítazná stratégia hry NIM II teda znie: vždy nechaj na oboch kôpkach rovnaký počet kameňov.

Ak jeden hráč bude začínať v takejto vítaznej pozícii, dostane súpera do kritickej pozície, tak ten mu vždy musí vrátiť situáciu, ktorá je vítaznou pozíciou. Ak začínajúci hráč nespraví chybu, v konečnom dôsledku “dotlačí” súpera k tomu, aby vzal posledný kameň z jednej z kôpok a tým umožnil nášmu hráčovi vyhrať. Ak hrajú dvaja neústupčiví hráči, k takejto situácii dôjde keď jeden z hráčov dostane kritickú situáciu (1,1) a teda musí zanechať súperovi situáciu (0,1) alebo (1,0).

### **2.1.3.5 Klasický NIM - využitie binárnej sústavy**

Posledná verzia hry NIM, ktorej by som sa venoval je najrozšírenejšia verzia, a to hra NIM s  $n$  kôpkami, pričom  $n$  je väčšie ako 1 a hráči berú ľubovoľný počet kameňov z jednej z kôpok. Pre jasnejšiu demonštráciu vítaznej stratégie budeme používať hru s 3 kôpkami. Tomuto variantu sa venoval aj Bouton vo vyššie spomínanom článku z roku 1901.

Aby sme vedeli určiť kritické pozície v tejto hre NIM, musíme si prepísať počty kameňov na jednotlivých kôpkach do binárnej (dvojkovej) sústavy.

Príklad 1:

Kôpky s 3, 7 a 8 kameňmi zapíšeme ako 11, 111 a 100.

Kritickou pozíciou bude situácia, keď na všetkých pozíciách v binárnom zápise našej hry bude párny počet 1 (ako príklad kritickej pozície slúži Príklad 1). Je tomu tak z dvoch dôvodov. Po prvé, ak situácia spĺňa našu požiadavku o párnom počte 1, tak buď je na všetkých kôpkach 0 kameňov, čo znamená, že sme prehrali, alebo sú kamene na minimálne 2 kôpkach a my nemôžeme hru priamo vyhrať. Druhý dôvod je, že nedokážeme z tejto pozície dostať súpera do kritickej pozície, jedine do pozície, z ktorej nám znova môže vrátiť kritickú pozíciu.

Je tomu tak, pretože ak vezmeme ktoréhokoľvek dve kôpky v hre, jasne nám ich počty kameňov určujú počet kameňov, ktorý musí byť na tejto kôpke.

Príklad 2:

Kôpky 100, 111 nám ukazujú, že na 1. pozícii sprava musí byť 1, na druhej taktiež a na tretej vyššej 0. Teda na tretej kôpke musia byť 3 kamene (binárne 11).

Preto ak hráč môže (a zároveň musí) zmeniť iba jeden počet kameňov, tak túto “rovnováhu” nemôže zachovať. Následovne, keď náš hráč narušil “rovnováhu”, znamená to, že v niektorom čísle (kôpke) ubral z nejakej pozície 1 (túto pozíciu budeme volať začiatočná pozícia zmeny - ZPZ) a v pozíciách nachádzajúcich sa od tejto pozície vpravo jednotky pridal, alebo odobral. Ak bola na začiatku jeho ťahu zachovaná “rovnováha” (nachádzal sa v kriticknej pozícii), tak na minimálne jednej inej kôpke je dostatok kameňov, aby sa 1 nachádzala na ZPZ. Z takejto kôpky smie náš protivník odobrať hocikolko kameňou, čím dostáva možnosť napodobniť ťah nášho hráča - odobrať a pridať 1 na tie isté pozície ako náš hráč, čím vytvorí opäť kritickú pozíciu pre nášho hráča. Môžeme si taktiež všimnúť, že pozícia, kde sa nachádzajú nejaké kamene iba na jednej z kôpok, takže je možné hru priamo vyhrať, spĺňa podmienku, že nie je zachovaná “rovnováha” párneho počtu 1.

Keď sme si takto určili kritické a víťazné pozície tejto hry NIM, vieme vytvoriť aj jej víťaznú stratégiu: vždy nechaj protivníkovi na každej kôpke toľko kameňov, aby pri binárnom zápise kôpok bol na každej pozícii párny počet 1.

#### **2.1.4 Edukačný software**

Edukačný softvér je podľa [11] softvér vytvorený špeciálne pre vyučovanie ako nástroj pre učiteľov na učenie alebo pre študentov na učenie sa. Je veľa spôsobov klasifikácie edukačného softvéru a to podľa: vyučovacieho predmetu, spôsobu použitia počítača, vzdelávacej paradigmy, fázy poznávacieho procesu, funkcie, či iných kritérií.

Projekt mojej bakalárskej práce bude vyžívať inštruktívnu paradigmu [11] pri výučbe víťazných stratégií, po ktorej budú nasledovať cvičenia k danej téme. Taktiež bude obsahovať časť, kde si používateľ bude môcť vyskúšať tvorenie vlastných stratégií,

čím bude vlastne sám objavovať princíp ich tvorenia a využitia. Táto časť programu bude využívať objaviteľskú paradigmu [11].

Z pohľadu funkcie programu sa ho bude dať radiť ako inštruktívny program, vysvetľujúci učivo a zabezpečujúci jeho nasledovné precvičenie, no taktiež sa bude radiť pod simulácie, keďže si používateľ bude môcť vytvoriť vlastnú stratégiu, ktorú nasledovne otestuje v simulátore s možnosťou “umelej inteligencie”, riadiacej sa vyššie spomínanou stratégiou. Tento kombinovaný spôsob charakteru aplikácie sme zvolili preto, že naším cieľom je vytvárať aplikácie využiteľné v konštruktivistickom spôsobe vyučovania – ktorý je však potrebné podporiť informáciami pre tých žiakov, ktorí sami nedokážu konštruktivisticky poznamenať objaviť a potrebujú pomôcť pri prekonaní „steny“, ktorá pred nimi stojí.

## **2.2 Prehľad technológií**

Moju webovú aplikáciu budem písať v jazyku Javascript, ktorý sa používa na tvorbu interaktívnych webových stránok a pracuje so štandardnými technológiami HTML5, ich DOM (document object model) a CSS3 kaskádovými štýlmi potrebnými na tvorbu pokročilej grafiky aplikácie.

### **2.2.1 Výhody javascriptu a html5 pri tvorbe webových aplikácií**

Javascript je dynamický programovací jazyk na prácu s webovými stránkami a aplikáciami, ktorý beží na strane klienta, čo umožňuje reakciu aplikácie hneď po používateľovej interakcii bez potreby čakať na odozvu servera. Táto vlastnosť je veľmi výhodná pre používateľov s pomalým internetovým pripojením, alebo obmedzenými prenosnými dátami.

Zásadnou pozitívnou vlastnosťou aplikácií písaných v dnes už štandardnom jazyku HTML5 je, že nevyžadujú inštaláciu žiadnych zásuvných modelov tretích strán. Dnešné moderné internetové prehliadače podporujú všetky vlastnosti HTML5, ako Canvas (plátno), či tagy na prehrávanie videí a hudby, čo umožňuje spustiť aplikáciu bez akýchkoľvek dodatočných programov, či modulov ako je napríklad Flash Player. Mnohé iné webové aplikácie vyžadujú inštaláciu dodatočných modulov, ktorých

inštalácia nie je žiadnym štandardom a v daných podmienkach nemusí byť možné ju uskutočniť (napríklad školské počítačové siete vyžadujú pri inštalácii nového software'u alebo jeho súčastí autorizáciu administrátora siete).

Ďalšou výhodou aplikácií v jazyku HTML 5 a Javascript je ich podpora na mobilných zariadeniach. V dnešnej dobe už takmer každý človek vlastní inteligentný mobilný telefón (smartphone), tablet, alebo iné mobilné zariadenie bežiacie na operačnom systéme Android, alebo iOS. Komunita detí a študentov stredných, či vysokých škôl nie je v tomto výnimkou.

Obzvlášť operačný systém od firmy Apple iOS je rozšírený po celom svete, no nepodporuje takmer žiadne zásuvné moduly tretích strán, ako napríklad Flash player. HTML5 a Javascript tvoria v tomto prípade akúsi výnimku, vďaka čomu je možné skupinu používateľov tohto operačného systému osloviť aplikáciami, hrami, alebo aj výukovými aplikáciami v jazyku HTML5, ktoré bez problémov spustia na svojich zariadeniach.

Na rozdiel od aplikácií písaných pre Flash, či iné moduly na internete, nie je HTML5 ohraničené stálou a nemennou oblasťou v okne prehliadača, v ktorej môže aplikácia bežať. Vďaka rozmanitým komponentom tohto jazyka, môže byť aplikácia prispôbena veľkosti okna a plne využívať všetky komponenty internetového prehliadača a plochu okna.

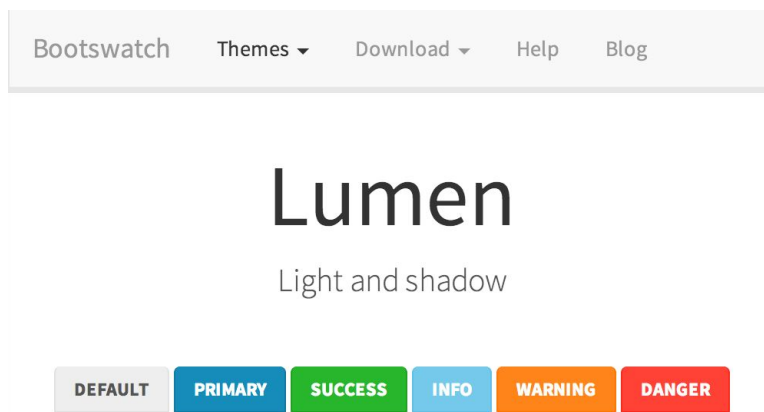
### **2.2.2 Knižnica JQuery**

Často používanou knižnicou jazyka Javascript je svetoznáme JQuery, slúžiacie programátorom na uľahčenie prístupu k DOM jazyka HTML5, práce s jednotlivými objektmi, ich CSS vlastnostiam a ich následnej úprave. K tejto knižnici je verejne dostupná dokumentácia [5] a taktiež sa jej venujú aj viaceré odborné knihy.

### **2.2.3 Bootstrap**

Pri tvorbe dizajnu mojej aplikácie budem používať jednu zo šablón technológie Bootstrap. Bootstrap je verejne prístupná sada nástrojov, slúžiacich na tvorbu

webových stránok a aplikácií. Obsahuje veľké množstvo šablón na jazyky HTML, CSS a úpravu typografie, tlačidiel, formulárov a mnohých iných komponentov, ktoré by sa dali pri tvorbe webu použiť. Bootstrap má licenciu Opensource a je dostupný v repozitároch GitHubu. Mnou zvolená šablóna nesie názov Lumen.



Obr. 3 Ukážka šablóny Lumen [6]

## 2.2.4 Google Identity Platform

Google Identity Platform je súbor vývojárskych nástrojov určených pre vývoj webových aplikácií, alebo aplikácií pre iOS alebo Android. Umožňuje vytvoriť systém autorizácie a prihlasovania používateľov do prostredia aplikácie pomocou účtu Google, ktorý používateľ používa v iných aplikáciách od firmy Google, ako napríklad Gmail, alebo Google+.

## 2.3 Podobné aplikácie a projekty

V dnešnej dobe, existuje už viacero výukových aplikácií a stránok voľne dostupných na internete.

### 2.3.1 Matika.in

Jednou z nich je webová aplikácia Matika.in [7]. Táto interakčná internetová stránka je určená na výučbu matematiky na základných školách. Pre proces tvorby mojej webovej aplikácie je zaujímavá zo stránky používateľského prostredia, ktoré je síce stavané pre žiakov a učiteľov základných škôl, ale po čiastočných úpravách by ho

bolo možné aplikovať aj v aplikácii určenej žiakom stredných škôl. Základným prvkom, ktorý pri analýze tohto GUI môžeme postrehnúť, je prehľadnosť komponentov a informácií na jednotlivých stránkach, pričom samotný vzhľad komponentov, ich množstvo a rozmiesnenie je vhodné a prijateľné aj pre mladších používateľov, či používateľov, ktorí nemajú s výukovými alebo celkovo internetovými aplikáciami skúsenosť. Veľmi dôležitým prvkom, ktorý je viditeľný v tejto aplikácii, je ľudský faktor. Človek a predovšetkým deti, majú potrebu komunikovať s ľuďmi a prítomnosť osoby (hoci i virtuálnej), vytvára príjemnejšie prostredie výukovej aplikácie.

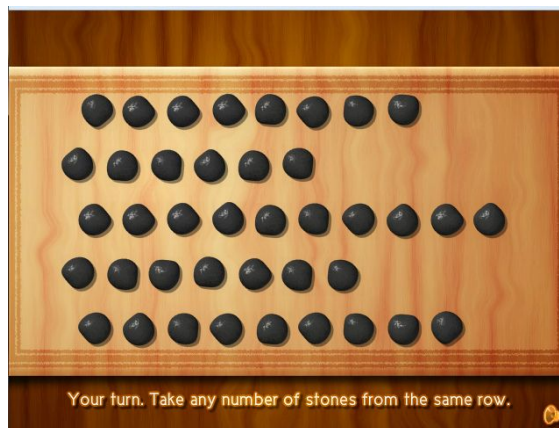
### 2.3.2 Simulátory NIM - Pearl3 a NimGame

Taktiež existujú stránky venované hre NIM, prípadne vysvetľujúce princípy hľadania víťaznej stratégie tejto hry. Niektoré sa viac zameriavajú na samotnú teóriu NIMu, ale na niektorých sú verejne dostupné aplikácie, ktoré umožňujú si zahrať NIM proti umelej inteligencii a tak si vyskúšať jej princíp, alebo samostatne prísť na systém kritických pozícií a víťazných stratégií niektorých verzií tejto hry. Jednou z takých online hier je hra Pearl3 [8].



Obr.4 Hra Pearl3 [8]

Táto aplikácia je veľmi pekne spracovaná z grafického hľadiska a je možné sa inšpirovať niektorými jej prvkami. Oproti iným webovým aplikáciám simulujúcim NIM, ako napríklad hra NimGame [9], obsahuje hra Pearl3 aj už vyššie spomínaný ľudský faktor - hráč hrá proti virtuálnej postave, ktorú môže vidieť.



Obr.5 Hra NimGame [9]

Tento prvok je z psychologického hľadiska výtanný, ale samotná postava vystupujúca v Pearl3 nie je podľa môjho uváženia vhodná do výukového programu pre stredné školy, preto sa pravdepodobne budem inšpirovať jedine samotným nápadom vizualizácie protihráča.

### 2.3.3 Výukový program demonštrujúci matematický princíp

V minulosti sa už niekoľko študentov UK venovalo výukovým aplikáciám s použitím jazyka HTML 5, Javascriptu a CSS3. Jednou z nich je aj slečna Švaralová, ktorá vo svojej bakalárskej práci [10] vytvorila interaktívnu výukovú aplikáciu, venujúcu sa matematickým dôkazom matematickej logiky. Z tejto práce budem pravdepodobne čerpať inšpiráciu pre riešenia niektorých technických problémov.



## 3. Návrh riešenia

### 3.1 Ciele projektu

#### 3.1.1 Prihlasovanie

Aplikácia bude komunikovať so serverovým backendom, napríklad pri ukladaní dát vytvorených stratégií, alebo pri online výzvach iných hráčov. Z tohto dôvodu je nevyhnutný systém prihlasovania používateľov. Aplikácia bude taktiež umožňovať prihlásenie ako “host” a všetky ukladané dáta sa budú ukladať do lokálneho úložiska v prehliadači.

#### 3.1.2 Krok za krokom

Jednou z hlavných a najrozsiahlejších častí aplikácie bude časť “Krok za krokom”. V tejto časti bude používateľ/žiak uvedený do problematiky víťazných stratégií, ich tvorenia a nasledovného využitia. V tejto časti, bude používateľ prechádzať tutoriálom, ktorý bude obsahovať interaktívne prvky, na tvorbu stratégií, hrania hry Nim a riešenie niekoľkých iných typov cvičení.

Inštrukcie a nápovedy, budú poskytované pomocou “virtuálnych rozprávačov”, ktorí budú sprevádzať používateľa počas všetkých cvičení. Tento nápad bol prevzatý z iných výukových aplikácií a kníh [1, 7, 8].



Obr. 6 Virtuálni rozprávači

#### 3.1.3 Sandbox

Časť Sandbox sa bude skladať z dvoch častí: editoru stratégií a simulátoru. V editore

stratégií si používateľ bude môcť vytvoriť tabuľky pre zápis stratégií a nasledovne v nich zaznačovať víťazné a kritické pozície a opakujúci sa úsek. Tabuľky budú jednorozmerné pre jedno-kôpkový Nim alebo dvojrozmerné pre dvoj-kôpkový Nim. Editor bude poskytovať funkciu kontroly stratégie, ktorá používateľa informuje o tom, či má chybu v niektorej pozícii, opakovanom úseku alebo je jeho stratégia bezchybná. Stratégie bude možné ukladať do lokálnej pamäte prehliadača, alebo po prihlásení do SQL databázy na server. Všetky uložené stratégie bude možné opätovne načítať a upraviť, prípadne zmazať.

Ďalšou časťou sandboxu bude simulátor, kde si používateľ bude môcť vyskúšať svoje stratégie proti počítačom vygenerovanej stratégii, alebo jednej zo svojich stratégií. Simulátor bude umožňovať nastaviť typ hry (počet kôpok), počet kameňov na jednotlivých kôpkach a maximálny počet kameňov braných naraz zo všetkých kôp. Generované stratégie budú mať 3 úrovne obtiažnosti s odlišnou chybovosťou. Hráč si taktiež bude môcť zvoliť, že za neho má hrať robot, ktorému nastaví jednu zo svojich stratégií.

### **3.1.4 Online výzvy**

Tretou časťou aplikácie bude oblasť, kde prihlásený používateľ bude môcť vyzvať k hre iného online používateľa, prípadne jeho robota (automatického hráča využívajúceho stratégiu používateľa). Táto časť bude obsahovať nastavenia výzvy (hry), výber stratégie a zoznam všetkých prihlásených používateľov. Po vyzvaní hráča, sa vyzvanému objaví bublina s informáciou o výzve, ktorú bude môcť prijať, alebo odmietnuť. Po prijatí sa mu otvorí nové okno s výberom stratégie, ktorú keď si zvolí, tak sa začne hra.

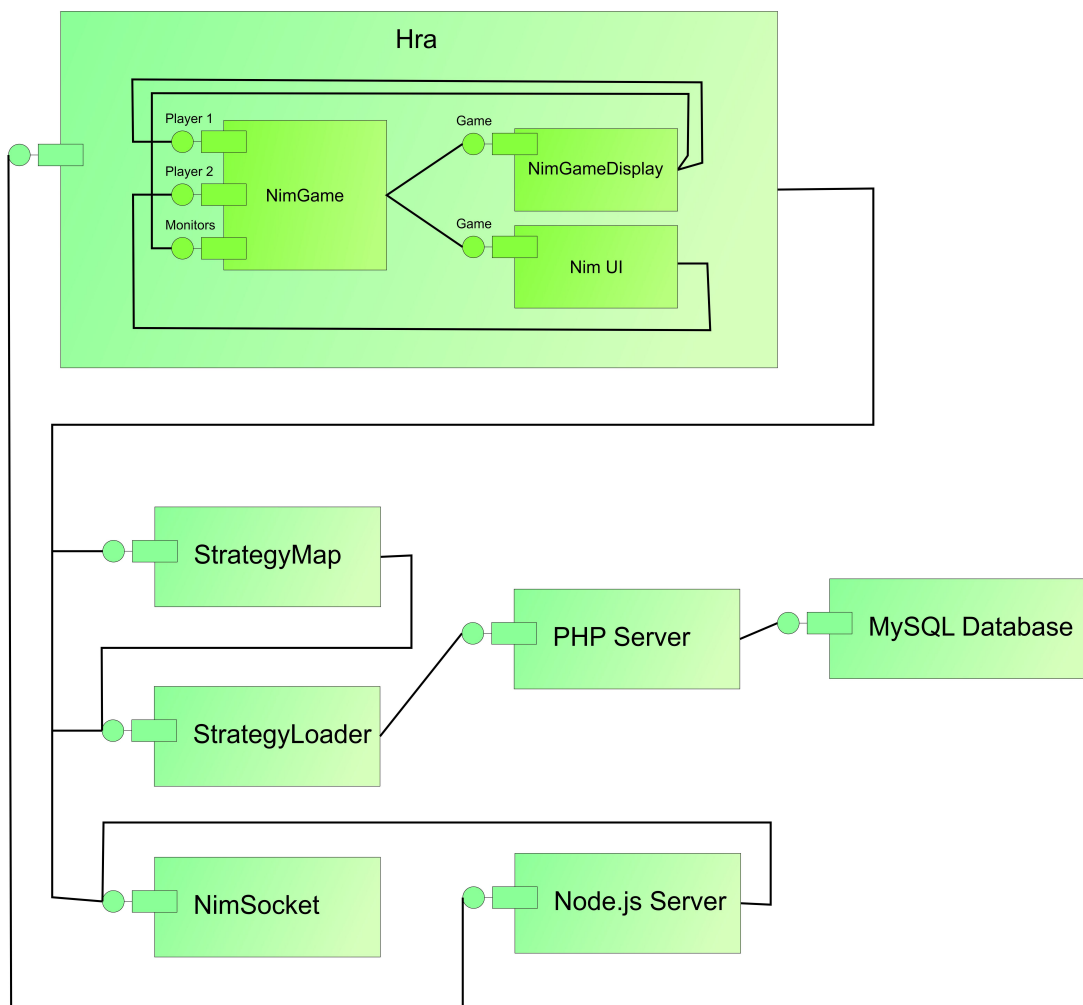
### **3.1.5 Príklady v časti “Krok za krokom”**

Príklady v časti “Krok za krokom” by sme mohli rozdeliť do 4 kategórii:

- demonštračné hry: používateľ hrá demonštračnú hru proti UI, alebo dvaja virtuálni rozprávači hrajú hru, aby demonštrovali nový typ hry Nim alebo nejakú konkrétnu situáciu.

- tvorba stratégie: používateľ dostane nástroje na tvorbu víťaznej stratégie a po jej vytvorení ju otestuje v hre proti UI.
- matematický zápis stratégie: používateľ dostane jednu, alebo viacero víťazných stratégií reprezentovaných pomocou tabuliek a jeho úlohou bude, zapísať túto stratégiu pomocou matematického vzorca/vzorcov.
- hľadanie stratégie: používateľovi bude predstavený typ hry Nim a jeho úlohou bude, nájsť víťaznú stratégiu. Aby dokázal, že jeho stratégia je bezchybná, bude musieť vyhrať 3 hry v rade proti bezchybnéj UI. Ak používateľ bude veľa hier prehrávať, rozprávač mu bude dávať drobné rady, ako stratégiu nájsť.

### 3.2 Komponenty a triedy



Obr. 12 Komponentový diagram

Aplikácia sa okrem jednotlivých stránok skladá z komponentov, ktoré môžu byť použité nielen na viacerých stránkach, ale aj po menších úpravách aj v iných projektoch. Samotné komponenty sa skladajú z funkcií, alebo objektov viacerých tried.

### **3.2.1 Hra**

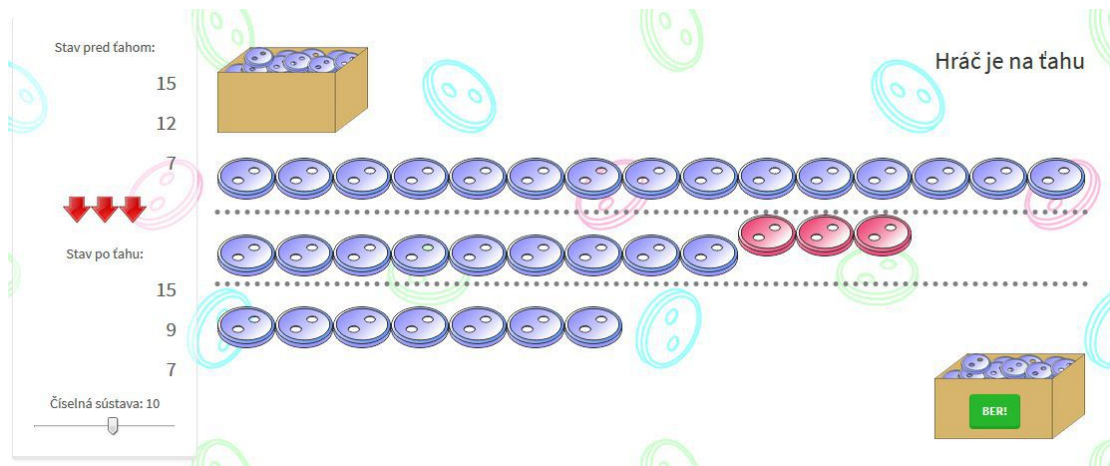
Pravdepodobne základným komponentom je samotná “Hra”. Tento komponent zabezpečuje priebeh hry a jej vizualizáciu. Skladá sa z troch objektov tried NimGame, NimGameDisplay a NimUI.

#### **3.2.1.1 NimGame**

NimGame dostane pri inicializácii nastavenia hry, ako počet kôpok, počet kameňov na kôpkach a maximálny počet kameňov, ktoré je možné naraz vziať. Taktiež NimGame dostane dva objekty, ktoré považuje za hráčov a pole objektov, ktoré slúžia na vizualizáciu hry. Pri každom pokuse o ťah, NimGame overuje, či sa pokúša ťahať hráč, ktorý je momentálne na ťahu, a či je ťah v súlade so zadanými pravidlami. Ak sú všetky podmienky splnené, NimGame informuje o ťahu objekty triedy NimGameDisplay, ktoré nasledovne ťah vizualizujú.

#### **3.2.1.2 NimGameDisplay**

Trieda NimGameDisplay slúži nie len na vizualizáciu hry, ale zabezpečuje aj interakciu medzi hráčom a hrou. Ak sa hry zúčastní priamo používateľ, táto trieda sprostredkováva jeho ťahy triede NimGame. Poslednou funkciou objektov triedy NimGameDisplay je informovať o aktuálnom stave hry objekty tried Nim1, Nim2 alebo Nim3Map, ktoré zobrazujú zvolenú stratégiu hráča a radia mu, ktorý ťah je v danej situácii najvýhodnejší.



Obr. 13 Hra zobrazovaná triedov NimGameDisplay

### 3.2.1.3 NimUI

Treťou spomínanou triedou je trieda NimUI, ktorá reprezentuje umelú inteligenciu v hre, ktorá samostatne hrá podľa vygenerovanej stratégie. Stratégia môže byť vygenerovaná podľa predlohy, ktorá bola načítaná používateľom, alebo vygenerovaná vstavaným algoritmom. V prípade, že sa NimUI riadi používateľovou stratégiou, snaží sa v danej pozícii nájsť najbližšiu kritickú pozíciu, do ktorej by mohol súpera dostať. Ak z danej pozície žiadnu kritickú pozíciu “nevidí”, alebo sa sám v kritickej pozícii nachádza, tak si zvolí náhodný ťah, ktorý je v zhode s pravidlami hry.

Algoritmus na vygenerovanie stratégie dokáže vytvoriť stratégiu pre hru Nim s jednou, dvoma alebo tromi kôpkami. Pri jednej a dvoch kôpkach sa snaží nájsť všetky pozície, ktoré sú kritické tj. pozície, z ktorých hráč nemôže dostať súpera do kritickej pozície. K tomuto účelu bolo využité dynamické programovanie. V prípade dvoj-kôpkového Nimu, je stratégia reprezentovaná dvojrozmerným poľom, no z teórie Nimu vieme, že v žiadnom riadku, či stĺpci tabuľky sa nesmú nachádzať dve kritické pozície, preto bola v algoritme, za účelom šetrenia pamäte, zvolená reprezentácia pomocou jednorozmerného poľa, v ktorom každý index reprezentuje jeden stĺpec stratégie a hodnota na tomto indexe zas riadok, v ktorom sa nachádza kritická pozícia v tomto stĺpci. Po dokončení tabuľky s rovnakou šírkou aj výškou algoritmus kontroluje, či sa v tabuľke už nenachádza úsek, ktorý sa opakuje. Po jeho nájdení je stratégia hotová a algoritmus ju uloží do pamäte NimUI.

Pri hre Nim s tromi kôpkami, sú ťahy generované priamo počas ťahu. Algoritmus v tomto prípade sa snaží zanechať také počty kameňov na jednotlivých kôpkach, aby pri binárnom zápise týchto počtov bol vždy na pozícii každej cifry párny počet jednotiek. Z teórie o hre Nim [2] vieme, že takáto stratégia je víťazná. Na nájdenie tohto ťahu stačí greedy algoritmus.

Trieda NimUI je taktiež využívaná na generovanie rady v hovorovej reči z určenej stratégie a podľa aktuálneho stavu hry.

### **3.2.2 StrategyMap**

Ďalším komponentom a taktiež triedou je StrategyMap. Do tejto abstraktnej triedy patria podtriedy Nim1 a Nim2, ktoré reprezentujú stratégiu pomocou tabuľky. Objekty týchto tried umožňujú stratégiu upravovať, kontrolovať a vizualizovať počas hry. StrategyMap je schopný vrátiť údaje stratégie v tvare JSON, ktoré môžu byť uložené do databázy a následne dokáže pomocou údajov v tomto tvare stratégiu opätovne načítať. Tabuľka reprezentujúca stratégiu interaguje buď s používateľom, alebo s inými objektmi napr. NimGameDisplay. Zobrazuje aktuálne zvolenú situáciu v hre a situácie, ktoré môže hráč súperovi z danej pozície zanechať. StrategyMap berie pri zobrazovaní pozícií ohľad na hranice opakovaného úseku, ktorý určil používateľ.

### **3.2.3 NarratorDialog**

Podstatným komponentom aplikácie je trieda NarratorDialog, ktorá umožňuje spustenie monológu, či dialógu virtuálnych rozprávačov a následné vykonanie určenej akcie po ukončení každej repliky. Tento komponent zabezpečuje priebeh demonštračných hier, rady a zadania úloh počas cvičení.

### **3.2.4 NimSocket**

Komponent NimSocket sa skladá z triedy NimSocketClient na strane prehliadača a triedy NimSocketServer na strane Node.js serveru. Tento komponent umožňuje komunikáciu používateľa s Node.js serverom pomocou technológie Socket.io. Okrem prihlasovania a výpisu zoznamu používateľov v časti “Online výzvy” slúži ako

prostredník počas samotnej hry. Vďaka tomu, že má funkcie rovnomené s funkciami tried z komponentu “Hra”, môže zastupovať triedu NimGame na strane klienta, ako aj hráčov pre objekt triedy NimGame na strane servera. NimSocket má taktiež ošetrené akcie pre situácie, že by niektorý z hráčov ukončil hru predčasne.

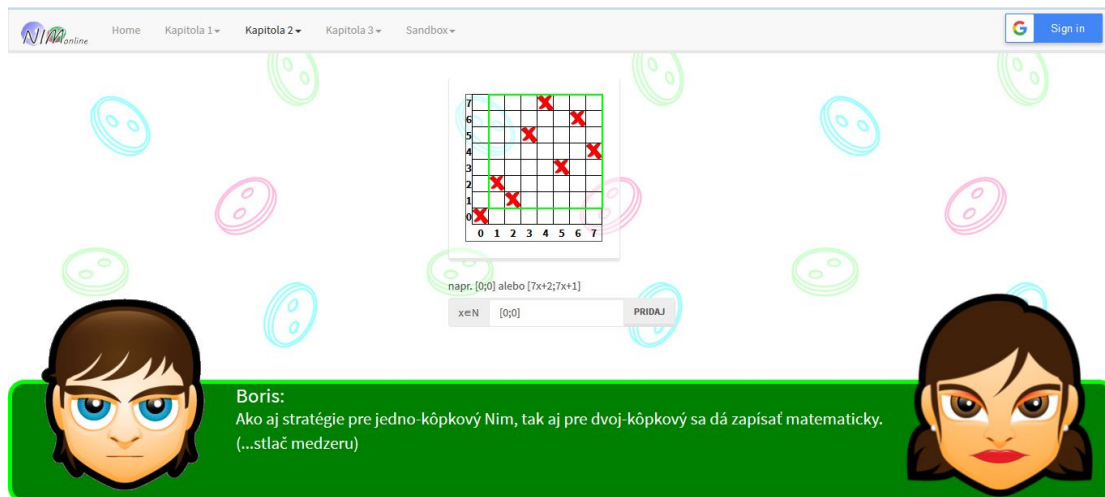
### **3.3 Návrh stránok pre jednotlivé komponenty**

Aplikácia je tvorená viacerými stránkami, PHP backendom a Node.js serverom.

#### **3.3.1 Krok za krokom**

Časť “Krok za krokom” je tvorená stránkou “intro01.php”, ktorá obsahuje úvod do tématiky a demonštračnú hru, stránkami jednotlivých cvičení radených podľa kapitol napr. “kap01cv02.php” pre cvičenie číslo 2 v kapitole 1. Ku každej stránke je aj rovnomený súbor typu “\*.js”, zabezpečujúci javascriptovú funkcionality. Všetky cvičenia využívajú triedu NarratorDialog na tvorenie a vizualizáciu virtuálneho rozprávača. Funkcia sayDialog triedy NarratorDialog je použitý na riadenie interakcie s používateľom a následnosť jednotlivých častí cvičení. Ďalšími využívanými triedami sú NimGame, NimUI, NimGameDisplay, nachádzajúce sa v rovnomených súboroch .js, Nim1, Nim2 zo súbore “mapy.js” a Nim3Map zo súboru “nim3Map.js”. Prvé tri spomínané triedy sú používané na riadenie a vizualizáciu výukových a demonštračných hier, tvoriac komponent “Hra” opísaný neskôr. Triedy Nim1, Nim2 a Nim3Map slúžia v tejto časti na hľadanie, tvorenie víťazných stratégií a ich nasledovné využitie pri hre.

Cvičenia sú rozdelené do jednotlivých kapitol podľa počtu kôpok v hre Nim a teda aj podľa náročnosti jednotlivých cvičení. Typy použitých cvičení boli opísané vyššie.



Obr. 7 Ukážka z časti “Krok za krokom”

### 3.3.2 Sandbox

Sandbox tvorí osobitnú záložku v navigácii, pretože tvorí najpodstatnejšiu časť výkovej aplikácie. Poskytuje nástroje na vlastné skúmanie a testovanie víťazných stratégií hry Nim. Sandbox sa skladá z troch osobitných častí (stránok): Editor stratégií, Simulátor a Online výzvy. Všetky časti Sandboxu využívajú na komunikáciu s backendom funkciu “php-function” uloženú v súbore “ajax-task.js”. Táto funkcia posiela HTTP request na server a nasledovne očakáva spätnú väzbu.

#### 3.3.2.1 Editor stratégií

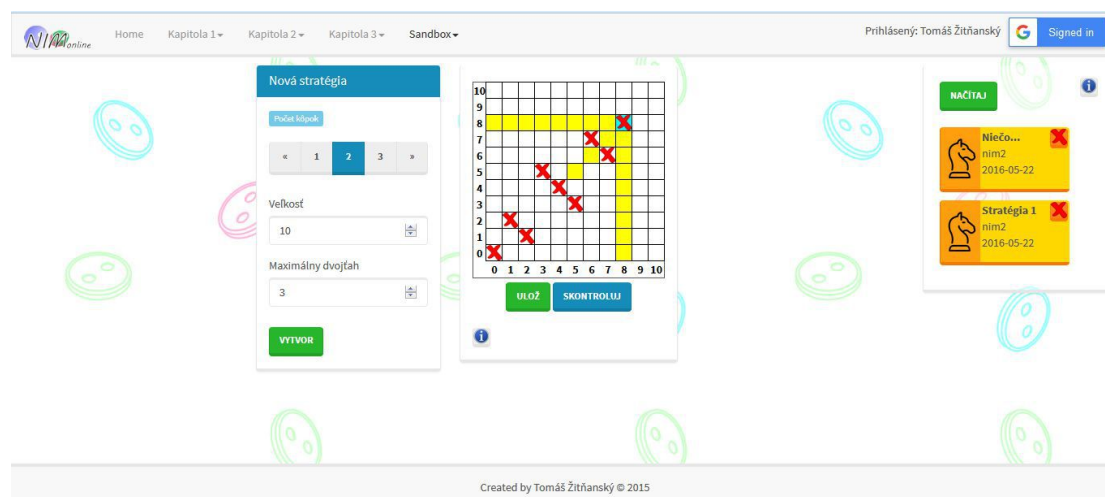
Editor stratégií je tvorený stránkou “strategy\_editor.php” a javascriptovým súborom “strategyEditor.js”.

Stránka obsahuje nástroj na generovanie prázdnej stratégie pre jedno- a dvoj-kôpkový Nim, umožňujúci zvoliť veľkosť mapy stratégie a maximálny počet braných kameňov pri danom type hry. Správnosť formátu vstupných údajov je samozrejme kontrolovaný. Používateľ po vytvorení stratégie môže mapu upravovať a nasledovne nechať skontrolovať jej správnosť. Výsledok testu je používateľovi oznámený v bubline pod mapou stratégie. Všetky interakcie s víťaznou stratégiou zabezpečuje objekt triedy Nim1 alebo Nim2. Stránka taktiež umožňuje stratégiu uložiť do MySQL databázy na server (ak je používateľ prihlásený), alebo do pamäte prehliadača.

Osobitným nástrojom na spätné načítanie stratégií je panel reprezentujúci objekt



StrategyLoader. Tento objekt komunikuje s ostatnými časťami stránky pomocou údajov prenášaných funkciou “Drag&Drop”. Po potiahnutí časti panelu, reprezentujúcej jednu stratégiu, na miesto mapy stratégie (prípadne na samotnú mapu) sa vytvorí nový objekt Nim1 alebo Nim2 a načíta sa vybraná stratégia. Panel na načítanie stratégií umožňuje taktiež zmazať stratégiu z pamäte prehliadača, alebo z MySQL databázy na serveri.



Obr. 8 Editor stratégií

### 3.3.2.2 Simulátor

Samotný predstavuje nástroj na nastavenie a hranie hry Nim. V simulátore je možné hrať proti stratégii vygenerovanej objektom triedy NimUI alebo proti niektorej zo stratégií vytvorených hráčom. Tieto stratégie sa dajú načítať pomocou nástroja StrategyLoader rovnako, ako v Editore stratégií. Na strane hráča je možné načítať stratégiu, ktorá bude slúžiť ako pomôcka pri hre, ktorú bude hrať samotný hráč, alebo ako stratégia pre UI, ktorá bude hrať namiesto hráča.

Formát nastavení hry a ich kompatibilita so zvolenými stratégiami je kontrolovaná a v prípade nezahody nie je hráčovi dovolené spustiť hru a hráč je informovaný o chybných nastaveniach.

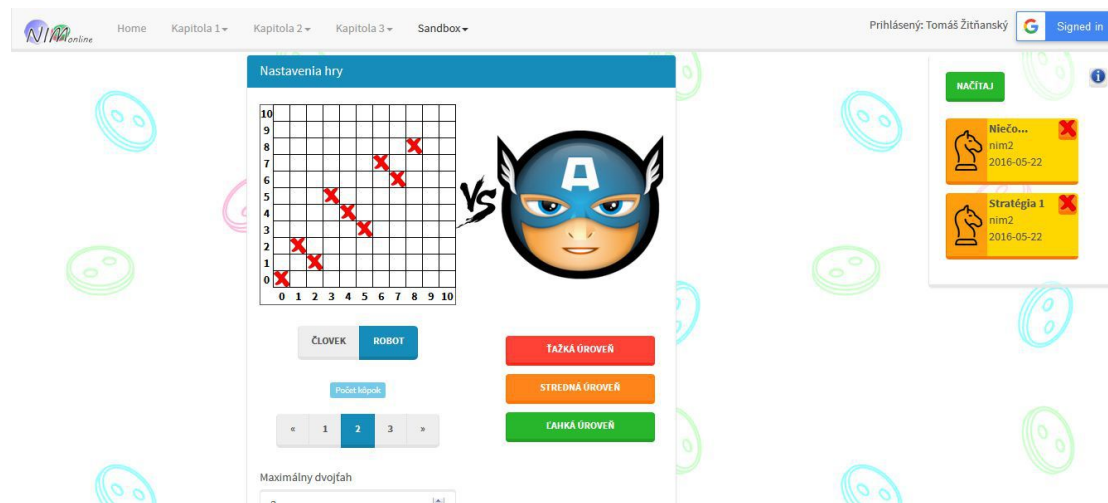
Po korektnom nastavení hry a jej spustení stránka načíta zvolené stratégie a vytvorí nový komponent “Hra”, ktorý bude opísaný neskôr. Súčasťou tohto komponentu je objekt typu NimUI, ktorý reprezentuje protihráča. Protihráč si vygeneruje stratégiu pre zvolenú hru, prípadne použije na jej vytvorenie údaje zo stratégie načítanej

hráčom.

Ak hráč načítal stratégiu, podľa ktorej plánuje hrať, alebo stratégiu pre svoje UI, tak sa vytvorí objekt typu Nim1 alebo Nim2, ktorý počas hry graficky zobrazuje stratégiu. Ak hrá samotný používateľ (nie jeho UI), tak je vygenerovaná aj NimUI, ktorá zabezpečuje rady, ohľadom najlepšieho možného ťahu, vzhľadom na zvolenú stratégiu a situáciu v hre, v prirodzenom jazyku. Tieto rady sú generované na základe stratégie, ktorú si hráč zvolí pred začiatkom hry.

Pri hre troj-kôpkového Nimu, je vytvorený nástroj (objekt) typu Nim3Map, ktorý slúži na reprezentáciu aktuálnej situácie hry v rôznych číselných sústavách.

Triedy Nim1, Nim2 a Nim3Map získavajú údaje o aktuálnej situácii od objektu triedy NimGameDisplay.



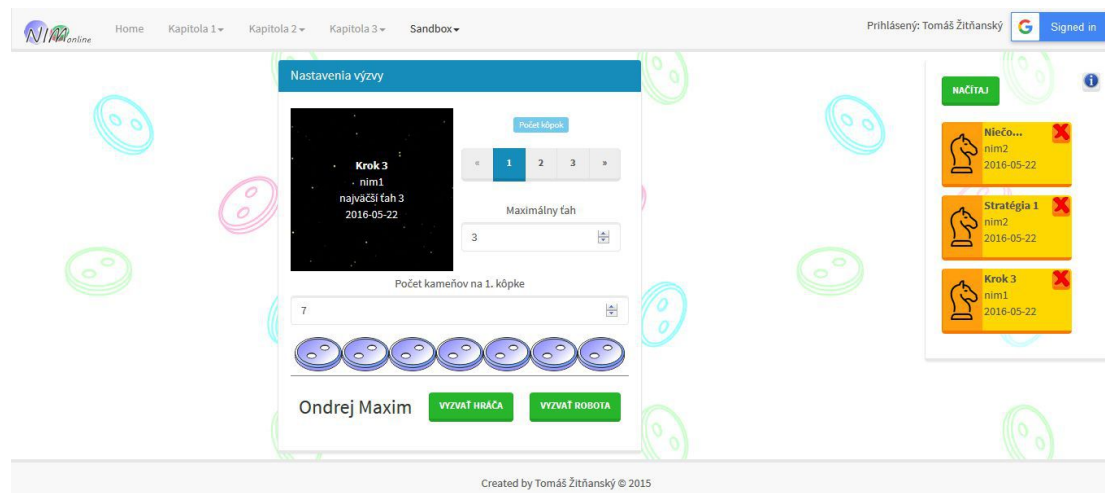
Obr. 9 Nastavenia hry v časti Simulátor

### 3.3.2.3 Online výzvy

Časť Sandboxu nazývaná Online výzvy je prístupná iba prihláseným používateľom. Táto stránka obsahuje už klasicky StrategyLoader, ktorý zabezpečuje načítanie stratégie pre stranu vyzývajúceho hráča. Pomocou objektu triedy NimSocketClient sa stránka pomocou knižnice socket.io pripojí k online Node.js serveru, z ktorého získa zoznam prihlásených používateľov. Pomocou tohto zoznamu môže používateľ vyzvať iného hráča, alebo jeho UI k hre, ktorú si najskôr nastaví. Výzva je poslaná na Node.js server, odkiaľ je preposlaná všetkým NimSocketClientom vyzvaného hráča. Ak je výzva prijatá, vyzvaný hráč si pomocou komponentu StrategyLoader smie zvoliť

pomocnú stratégiu. Nasledovne sa na serveri vytvorí komponent “Hra”, ktorý komunikuje cez sockety s jednotlivými hráčmi. Hráči majú v prehliadači vytvorený len objekt NimGameDisplay, ktorý komunikuje s hrou pomocou objektu NimSocketClient.

Po skončení hry sú hráči opätovne presmerovaní na stránku “Online výzvy”.



Obr. 10 Online výzvy

### 3.3.3 Node.js

Node.js server slúži na komunikáciu hráčov počas online výziev. Pri prihlásení používateľa sa na strane klienta vytvorí NimSocketClient, ktorý sa prihlási na server a je zaradený medzi sockety daného hráča. Server poskytuje týmto socketom zoznam prihlásených používateľov a možnosť vyzvať ich k hre. Všetka komunikácia s používateľmi prebieha výhradne pomocou emitovaných socket.io eventov, čiže využitím modernej technológie Websocket.

Ak je niektorý hráč vyzvaný k hre, server vytvorí objekt typu NimServer, ktorý zabezpečuje prijatie, odmietnutie výzvy, alebo prirodzené ukončenie hry, či ukončenie z dôvodu odpojenia jednej z hrajúcich strán. Po prijatí výzvy, vrátane zvolenia stratégie, NimServer vytvorí objekt triedy NimGame, ktorý komunikuje s objektmi NimSocketServer, ktoré reprezentujú serverovú stranu triedy NimSocketClient.

### 3.3.4 PHP-backend

Úkony, ako prihlasovanie používateľov, ukladanie, načítanie, či mazanie stratégií z

MySQL databázy, sú vykonávané php-backendom. Používateľ na komunikáciu s backendom používa funkciu “php-function”, ktorá pomocou technológie Ajax pošle HTTP request stránke “ajax-funkcie.php”, ktorá request spracuje a odošle odpoveď v tvare JSON. Túto spätnú väzbu vráti po úspešnej komunikácii funkcia “php-function” ako svoju výslednú hodnotu.

### 3.4 Dátový model a forma ukladaných údajov

Stratégie vytvorené používateľom sa ukladajú do MySQL databázy (Tab. 1), alebo do pamäte prehliadača.

Názov	Typ	Popis
id_strategy	integer	Identifikačné číslo stratégie (primary key).
nazov	varchar	Názov stratégie.
datum	date	Dátum vytvorenia stratégie.
id_user	varchar	Identifikačné číslo používateľa.
data	text	Dáta uloženej stratégie vo formáte JSON.

Tab. 1 Tabuľka “strategie” v MySQL databáze

V prípade, že používateľ nie je prihlásený, údaje sa ukladajú do LocalStorage prehliadača. K tomuto účelu sa vytvoria v LocalStorage nasledovné údaje (Tab. 2).

Názov	Popis
strategyMaxId	Najväčšie nepoužité identifikačné číslo. (Slúži ako auto-increment v SQL)
strategyIDs	Pole všetkých použitých identifikačných čísel.
strategy*	Údaje a dáta uloženej stratégie. * je v praxi nahradená identifikačným číslom

	<p>stratégie. Štruktúra je identická s riadkom tabuľky “strategie” v MySQL databáze, s výnimkou id_user, ktoré v tomto prípade nie je známe.</p>
--	--

Tab. 2 Údaje ukladané v LocalStorage prehliadača

## 3.5 Komunikačné protokoly

### 3.5.1 Ajax

Technológia Ajax je využívaná na komunikáciu s backendom aplikácie, bez potreby opätovného načítania stránky. Väčšina komunikácie tohto typu je využívaná vo funkcii “php-function”, ktorá sprostredkúva spúšťanie funkcií v backendovom súbore “ajax-funkcie.php”. Na uľahčenie posielania HTTP requestov pomocou Ajax komunikácie, je použitá knižnica JQuery. Údaje sú na server posielané metódou POST a späť sa očakávajú údaje vo formáte JSON.

### 3.5.2 Google Identity Platform

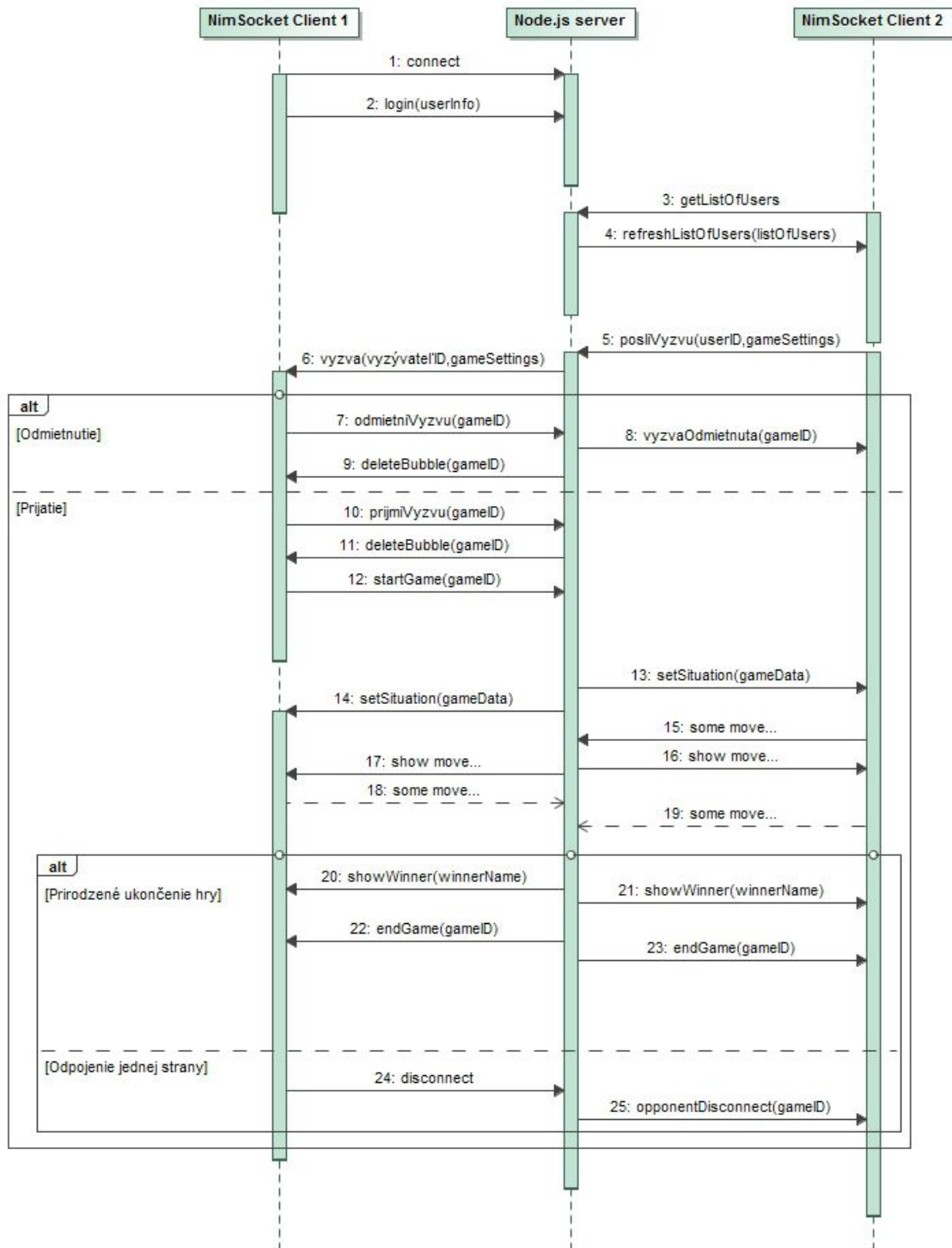
Prihlasovanie do aplikácie je zabezpečené pomocou Google Identity Platform. Jedná sa o prihlásenie pomocou účtu Google, ktorý nasledovne vygeneruje identifikačný kód, nazývaný ID token. Tento kód je odoslaný do backendu, kde si server overí jeho platnosť a dostane od spoločnosti Google základné informácie o používateľovi, vrátane jeho identifikačného čísla pre danú aplikáciu.

Overovanie získaného ID tokenu sa vykonáva poslaním HTTP requestu na adresu: “https://www.googleapis.com/oauth2/v3/tokeninfo”. Ako odpoveď server dostane text v tvare JSON, v ktorom si overí hodnotu premennej “aud”, ktorá sa musí zhodovať s “app's client IDs ” aplikácie, ktoré bolo vygenerované pri registrovaní projektu na stránkach Google.

### 3.5.3 Socket.io

Na komunikáciu s Node.js serverom pri hraní online výziev je použitá knižnica

socket.io.js a taktiež modul pre Node.js, Socket.io. Pre uľahčenie komunikácie socketu a komponentu “Hra” na serveri, bol socket zabudovaný do triedy NimSocketServer na strane servera a NimSocketClient na strane klienta. Oboje tieto triedy sprostredkujú objektom tried NimGameDisplay a NimGame vzájomnú komunikáciu. Proces komunikácie medzi klientmi a serverom je znázornený pomocou sekvenčného diagramu na obrázku číslo 11.



Obr. 11 Sekvenčný diagram komunikácie socketov a Node.js servera

### 3.6 Konfiguračné súbory

Z dôvodu bezpečnosti majú viaceré školské systémy povolený na vonkajšiu komunikáciu len port 80, cez ktorý bežne komunikujú prehliadače s webovými servermi. Aby fungovala moja aplikácia využívajúca technológiu Node.js aj na týchto

systemoch, bolo nutné na strane servera spraviť vnútorné presmerovanie websocket requestov, pomocou konfiguračných súborov, na port, na ktorom počúva Node.js server aplikácie. Na serveri bežia taktiež iné aplikácie a preto aj requesty pre webový server s PHP modulom sú presmerované na špeciálny port určený pre túto aplikáciu.

Uvádžam časti konfiguračných súborov, ktoré sa týkajú tohto projektu:

- `/etc/apache2/apache2.conf` :

```
<IfDefine hostnim>
  PidFile ${APACHE_PID_FILE}.nim
  Mutex file:${APACHE_LOCK_DIR}nim default
</IfDefine>
<IfDefine hostnim>
  IncludeOptional sites-enabled/nim.conf
</IfDefine>
```

- `/etc/apache2/sites-available/nim.conf` :

```
Listen 8028
ServerName localhost:8028
User nimweb
Group nimweb
<VirtualHost *:8028>
  LogLevel debug
  ErrorLog /var/www/nim/apache2logs/error.log
  CustomLog /var/www/nim/apache2logs/access.log combined
  ServerAdmin ...
  DocumentRoot /var/www/nim/web
  <Directory /var/www/nim/web>
    Options +FollowSymLinks -MultiViews
    AllowOverride All Options=Indexes,MultiViews
    Require all granted
    php_value session.save_path /var/www/nim/sessions
  </Directory>
</VirtualHost>
```

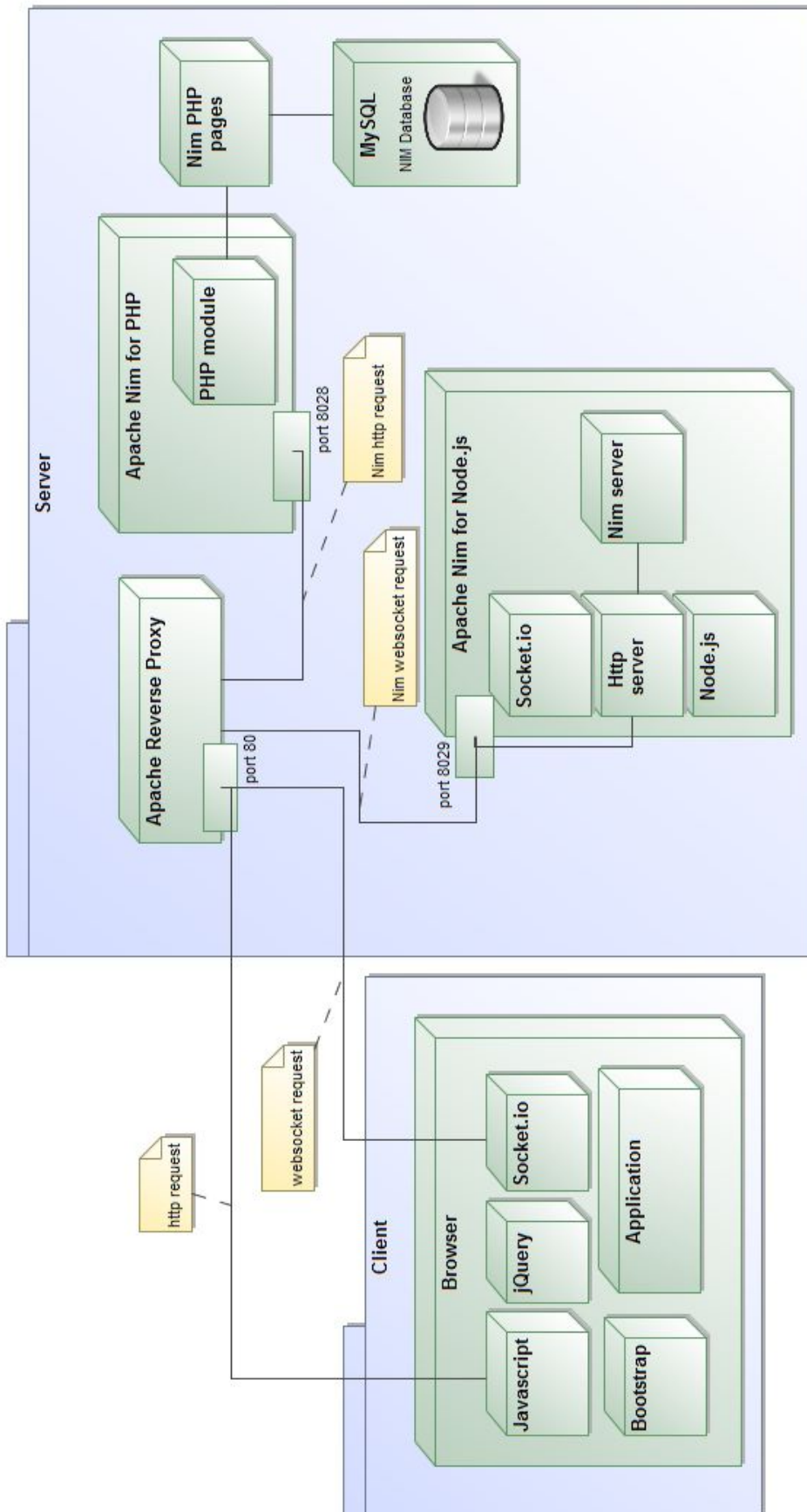
- `/etc/apache2/sites-available/reverseproxy.conf` :

```
ProxyPass /nim/ http://localhost:8028/nim/
<Location /nim/>
  ProxyPassReverse http://localhost:8028/nim/
  ProxyHTMLEnable On
  ProxyHTMLURLMap http://localhost:8028/nim/ /nim/
```



```
</Location>
ProxyPass /nimio/ http://localhost:8029/
ProxyPassReverse /nimio/ http://localhost:8029/
RewriteEngine On
RewriteCond %{REQUEST_URI} ^/nimio/socket.io [NC]
RewriteCond %{QUERY_STRING} transport=websocket [NC]
RewriteRule /nimio/(.*) ws://localhost:8029/$1 [P,L]
RewriteCond %{REQUEST_URI} ^/nimio/socket.io [NC]
RewriteCond %{QUERY_STRING} transport=polling [NC]
RewriteRule /nimio/(.*) http://localhost:8029/$1 [P,L]
ProxyPass /nimio/socket.io http://localhost:8029/socket.io
ProxyPassRevers /nimio/socket.io http://localhost:8029/socket.io
```

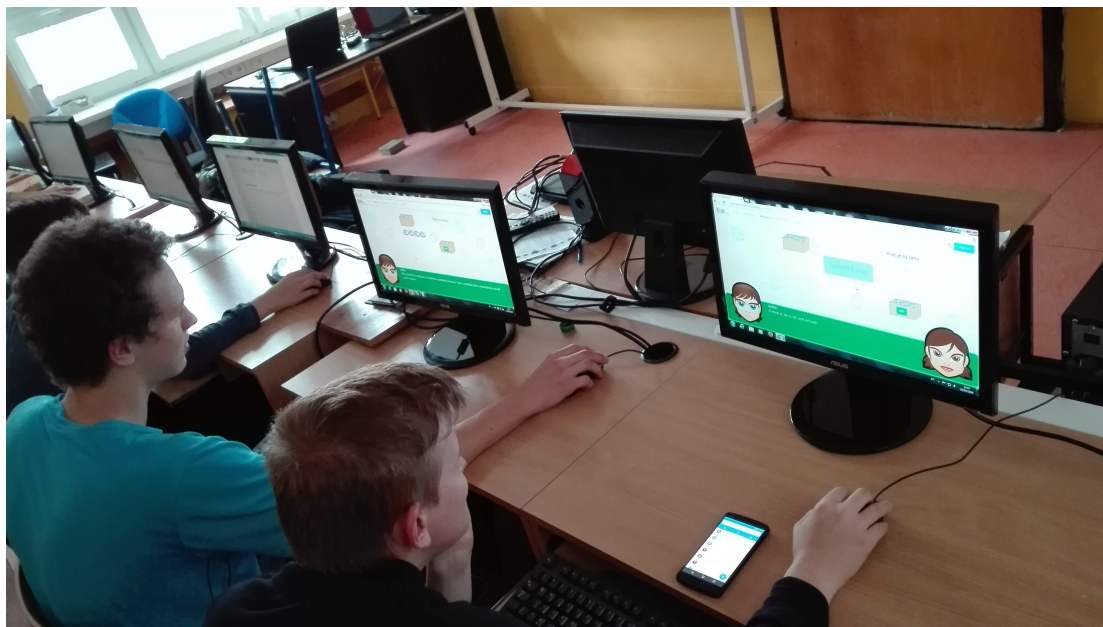
Na servri teda beží jeden http server Apache 2.4 na porte 80, ktorý je v roli reverse proxy a presmerováva požiadavky ďalej, ďalší http server Apache 2.4 s modulom PHP na porte 8028, ktorý slúži ako PHP backend a okrem toho node.js server na porte 8029, ktorý obsluhuje vzájomné hry hráčov po sieti. Uvedené nastavenia ukazujú, že reverse proxy preposiela aj požiadavky protokolov websocket aj polling, nad ktorými je knižnica socket.io vybudovaná. Z hľadiska prehliadača je však všetko dostupné cez štandardný http port 80.



Obr. 14 Deployment diagram

## 4. Otestovanie aplikácie na skupine stredoškolákov

Program sme otestovali na referenčnej skupine 5 stredoškolákov zo Spojenej školy sv. Františka z Assisi (2 – 3 ročník) a jednom žiakovi 8. ročníka ZŠ. Všetci majú záujem o matematiku a pravidelne sa zúčastňujú rozličných odborných súťaží.



Obr. 15 Testovanie aplikácie

Spätaná väzba od študentov vyššie spomínanej školy bola prevažne pozitívna. Hodnotenie celkového dojmu dosiahlo priemerne 75%. Študentom sa páčila interaktivita aplikácie, grafické prevedenie a zaujímavé spracovanie hry Nim.

Študenti taktiež poukázali na niekoľko miest v časti “Krok za krokom”, kde by uvítali viac inštrukcií, čo a ako je treba spraviť.

Po ukončení testovania boli na základe komentárov a hodnotenia testerov vykonané na aplikácii viaceré úpravy.

## 5. Záver

Cieľom práce bolo vytvoriť interaktívnu webovú aplikáciu, ktorá oboznámi študentov stredných škôl so záujmom o matematiku s hrou Nim a problematikou hľadania víťazných stratégií. Aplikácia taktiež umožňuje precvičiť si získané znalosti v sérii cvičení. Okrem interakcie s počítačom a virtuálnymi hráčmi riadenými generovanými stratégiami si študenti môžu vyskúšať svoje stratégie aj v hre proti inými používateľom v reálnom čase.

Aplikácia uvádza používateľa do problematiky, ale on sám musí aktívne riešiť zadané úlohy a objavovať tak víťazné stratégie. Program kontroluje správnosť riešenia a umožňuje, niekedy vyžaduje, overenie víťaznej stratégie v hre proti umelej inteligencii, ktorá si vytvára stratégie pre pravidlá konkrétnej hry.

V aplikácii sa študenti stretnú s hrami Nim rôznej úrovne a to s jedno-kôpkovým, dvoj-kôpkovým a troj-kôpkovým, ktorý sa dá nazvať aj mnoho-kôpkovým Nimom. Dôraz bol kladený aj na dizajn, použiteľnosť a niektoré didaktické postupy.

Konkrétne je naším dlhodobým cieľom preskúmať ako najlepšie podporiť výuku v štýle Konštruktivismu pomocou informačných technológií. Cieľom je, aby študent sám objavoval naučené poznatky, vďaka čomu sú získané poznatky trvácnejšie a navyše sa študent pri tom trénuje v objavovaní, čo je dôležitá kompetencia pre budúcu prax. Túto úlohu sa nám podarilo splniť.

Výslednú aplikáciu sme otestovali na skupine stredoškôľakov zo Spojenej školy sv. Františka na Karloveskej 32 v Bratislave. Spätná väzba študentov bola zväčša pozitívna. Páčila sa im interaktivita aplikácie, grafické prevedenie a zaujímavé spracovanie hry Nim.

Projekt sa dá ďalej rozvíjať tak, že by bolo možné vymýšľať ďalšie verzie pravidiel hry Nim, pričom by umelá inteligencia dokázala generovať stratégie aj pre tieto novovytvorené pravidlá. Taktiež by bolo možné pridať aj iné hry, ako len Nim. Pre tieto hry by sa dali vytvárať online turnaje pre triedy, školy, či všetkých používateľov a študenti by mohli mať k dispozícii záznamy o svojich úspechoch a odohraných hrách.

## 4. Použitá literatúra

- [1] Ján Gátias a kol.: Hry takmer matematické, edícia Škola mladých matematikov, Mladá fronta, 1982
- [2] Charles L. Bouton: Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4. (1901 - 1902), pp. 35-39.
- [3] Palani Dharanidharan et. al. : Developing Nim Game for iPhone  
Dostupné na: <http://www.worldcomp-proceedings.com/proc/p2012/SER3370.pdf>  
Citované: 24.5.2016
- [4] Christopher Freeman: Nim: Serious Math with a Simple Game; Prufrock Press Inc.; 2005
- [5] jQuery API, The jQuery Foundation, 2016,  
Dostupné na: <http://api.jquery.com/> Citované: 24.5.2016
- [6] Lumen Bootstrap Theme, UseBootstrap, 2014  
Dostupné na: <http://usebootstrap.com/theme/lumen> Citované: 24.5.2016
- [7] Andrej Probst: Matika.in.sk; 2015  
Dostupné na: <http://www.matika.in/sk/> Citované: 24.5.2016
- [8] Pearls3 - Online flash hra NIM  
Dostupné na: <http://www.transience.com.au/pearl3.html> Citované: 24.5.2016
- [9] NimGame  
Dostupné na: <http://www.memory-improvement-tips.com/nim-game.html>  
Citované: 24.5.2016
- [10] Monika Švaralová: Výukový program demonštrujúci matematický princíp; bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2015
- [11] Doc. RNDr. B. Brestenská a kol.: Klasifikácia a hodnotenie edukačného softvéru; Asociácia projektu Infovek, 2005.